Problème

Ce problème est constitué de 4 parties largement (mais pas totalement) indépendantes. Le candidat est invité à traiter en priorité les questions 1 et 2 de la partie A qui lui seront utiles dans l'ensemble du sujet.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $B_{n,k}(X)$ ou simplement $B_{n,k}$ le polynôme

$$\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k},$$

où les $\binom{n}{k}$ sont les coefficients binomiaux, si bien que l'on a , pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$B_{n,k}(t) = \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Ces polynômes sont appelés polynômes de Bernstein.

L'objet de ce problème est d'étudier la famille formée par l'ensemble des polynômes de Bernstein et son utilité dans les applications sous différents aspects (algébriques, probabilistes, géométriques et analytiques).

Partie A. Généralités sur les polynômes de Bernstein

1. Premières conséquenses des définitions.

a. Les racines de $B_{n,k}(X)$ et le signe de la fonction $B_{n,k}(t)$ sur $[0, 1]$.

a. **i**. Donner les expressions de $B_{0,0}(X)$, $B_{n,0}(X)$ et $B_{n,n}(X)$.

a. **ii**. Expliciter les racines de $B_{n,k}(X)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et de $k \in [\![0, n]\!]$.

a. **iii**. Étudier le signe de la fonction $B_{n,k}(t)$ sur $[0, 1]$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et de $k \in [\![0, n]\!]$.

b. Les polynômes de Bernstein d'un même degré forment une partition de l'unité.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons : $\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(X) = 1$.

c. Une définition récursive des polynômes de Bernstein.

Démontrer que pour tout entier naturel $n > 1$ et tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, nous avons

$$B_{n,k}(X) = (1-X) B_{n-1,k}(X) + X B_{n-1,k-1}(X).$$

Cette propriété nous permet de donner une définition récursive des polynômes de Bernstein en convenant que $B_{n,k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$.

2. La famille $\mathcal{B}_n = (B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

[1] Y. Martinez-Maure

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On se propose de démontrer que la famille $\mathcal{B}_n = (B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ par deux méthodes différentes.

a. La méthode directe.

a. i. Quel est, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le degré et la valuation de $B_{n,k}$? On rappelle au passage que la valuation d'un polynôme est le degré du son monôme de plus bas degré. Ainsi, dire qu'un polynôme à une valuation nulle revient à dire que son terme constant est non nul.

a. ii. Démontrer que $\mathcal{B}_n$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ en considérant les valuations.

a. iii. En déduire que $\mathcal{B}_n$ est bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Le recours à un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\varphi_n(P)(X) = nXP(X) + X(1-X)P'(X),$$

où $P'(X)$ désigne le polynôme dérivé de $P(X)$.

b. **i.** Vérifier que φ_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et qu'il vérifie, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi_n(B_{n,k}) = kB_{n,k}$.

b. **ii.** En déduire que $\mathcal{B}_n = (B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n})$ est bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que l'endomorphisme φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$ est diagonalisable.

b. **iii.** L'endomorphisme φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$ est-il bijectif ?

c. Application à l'étude de $B_n : P \mapsto \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(X)$.

c. **i.** Démontrer que l'on définit un endomorphisme B_n de $\mathbb{R}_n[X]$ en posant

$$B_n(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(X) \quad \text{pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X].$$

c. **ii**. Cet endomorphisme est-il bijectif ?

Partie B. Les polynômes de Bernstein et les probabilités

Considérons une variable aléatoire Y qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

1. a. Donner un exemple de situation probabiliste pouvant être décrit par une telle loi.

b. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, que représente alors $B_{n,k}(p)$ en termes probabilistes ?

2. **a**. Que représentent les sommes $\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(p)$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(p)$ pour la variable aléatoire Y ?

[1] Y. Martinez-Maure

b. Rappeler comment il est possible d'exprimer $\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(p)$ en fonction de n et de p

b. **i**. En utilisant le calcul de l'espérance de Y.

b. **i**. Par un calcul direct.

c. Quelle est la variance de Y ? Rappeler comment on peut la calculer.

d. **i**. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(p)$ en fonction de n et de p.

d. **ii**. Comment aurait-on pu établir ce résultat directement (c'est-à-dire par un calcul n'utilisant pas celui de la variance de Y) ?

Partie C. Les polynômes de Bernstein et la géométrie

On se place dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Étant donné un entier naturel n, on se donne un $(n+1)$-uplet $\mathbf{P} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de points de $\mathcal{P}$.

On appelle courbe de Bézier de degré n associée à $\mathbf{P}$, la courbe de $\mathcal{P}$ qui est paramétrée par

$$f_{\mathbf{P}} : \begin{array}{l} [0,1] \to \mathcal{P} \\ t \mapsto M(t), \end{array}$$

où $\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t) \overrightarrow{OP_k}$. Cette courbe de Bézier de $\mathcal{P}$ sera noté $\mathcal{B}(\mathbf{P})$ et on dit que les points $P_0, P_1, \ldots, P_n$ en sont les $n+1$ points de contrôle.

1. <u>Premières propriétés.</u>

a. Cette définition d'une courbe de Bézier de $\mathcal{P}$ est-elle correcte ? En d'autres termes, est-ce qu'elle dépend du choix du repère $\mathcal{R}$, et en particulier de celui du point O ? Peut-on l'exprimer en termes de barycentre ?

b. **i**. Déterminer $f_{\mathbf{P}}(0)$ et $f_{\mathbf{P}}(1)$.

b. **ii**. Pour tout $t \in [0,1]$, exprimer les coordonnées $(x(t), y(y))$ de $M(t)$ dans $\mathcal{R}$ en fonction des coordonnées respectives (x_0, y_0), $\ldots$,(x_n, y_n) des $n+1$ points de contrôle $P_0, \ldots, P_n$.

b. **iii**. Démontrer chacune des deux propriétés suivantes :

(I) Pour tout $t \in [0,1]$, $f_{\mathbf{P}}(t)$ est un point de l'enveloppe convexe de $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$;

(II) Pour toute transformation affine $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $\phi(\mathcal{B}(\mathbf{P})) = \mathcal{B}(\phi(\mathbf{P}))$, où $\phi(\mathbf{P})$ désigne le $(n+1)$-uplet $(\phi(P_0), \phi(P_1), \ldots, \phi(P_n))$.

2. <u>Étude d'un exemple et construction par points et tangentes.</u>

2. **a.** On considère dans le plan $\mathcal{P}$, le triplet de points non alignés $\mathbf{P} = (P_0, P_1, P_2)$, où P_0, P_1 et P_2 sont les points de coordonnées respectives $(-1,3)$, $(1,-1)$ et $(3,2)$. Pour tout $t \in [0,1]$, on définit les points $M_1(t)$, $M_2(t)$ et $M(t)$ par les égalités vectorielles suivantes :

[1] Y. Martinez-Maure

- $\overrightarrow{OM_1(t)} = B_{1,0}(t)\overrightarrow{OP_0} + B_{1,1}(t)\overrightarrow{OP_1}$;
- $\overrightarrow{OM_2(t)} = B_{1,0}(t)\overrightarrow{OP_1} + B_{1,1}(t)\overrightarrow{OP_2}$;
- $\overrightarrow{OM(t)} = B_{1,0}(t)\overrightarrow{OM_1(t)} + B_{1,1}(t)\overrightarrow{OM_2(t)}$.

2. a. i. Démontrer que, pour tout $t \in [0,1]$, le point $M(t)$ que nous venons d'introduire n'est autre que le point $f_{\mathbf{P}}(t)$, où $\mathbf{P} = (P_0, P_1, P_2)$. Le lieu de $M(t)$ lorsque t décrit le segment $[0,1]$ est donc la courbe de Bézier d'ordre 2 associée à $\mathbf{P}$.

2. a. ii. Avec le module de géométrie dynamique, tracer les points P_0, P_1, P_2 et le lieu des points $M_1(t)$, $M_2(t)$ et $M(t)$ lorsque t décrit le segment $[0,1]$. Que peut-on conjecturer au sujet de la position de chacune des droites (P_0P_1), (P_1P_2) et $(M_1(t)\,M_2(t))$ pour tout $t \in [0,1]$, par rapport à la courbe de Bézier d'ordre 2 associée à $\mathbf{P}$? Vérifier que cette conjecture semble encore vérifiée si l'on remplace $\mathbf{P} = (P_0, P_1, P_2)$ par d'autres triplets de points non alignés $\mathbf{Q} = (Q_0, Q_1, Q_2)$.

2. b. i. Déterminer un système d'équations paramétriques de cette courbe $\mathcal{B}(\mathbf{P})$.

2. b. ii. Vérifier la conjecture émise au 2.i dans le cas particulier du triplet $\mathbf{P} = (P_0, P_1, P_2)$.

2. c. Démontrer que, dans le cas général d'une courbe de Bézier d'ordre 2 associée à un triplet de points non alignés **quelconque** $\mathbf{P} = (P_0, P_1, P_2)$ de $\mathcal{P}$, la courbe de Bézier $\mathcal{B}(\mathbf{P})$ admet la droite (P_0P_1) pour tangente en P_0 et la droite (P_1P_2) pour tangente en P_2.

Partie D. Les polynômes de Bernstein et l'analyse

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème d'approximation de Weierstrass en utilisant les polynômes de Bernstein :

Théorème d'approximation de Weierstrass. *Toute fontion réelle définie et continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur ce segment.*

1. Résultats techniques préliminaires.

1. a. Démontrer que, pour tout $t \in [0,1]$, on a $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$.

1. b. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nt)\, B_{n,k}(t) = nt(1-t)\,.$$

On pourra utiliser les résultats obtenus aux questions $A.1.b$ et $B.2$.

[1] Y. Martinez-Maure

1. **c**. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(t) \leq \frac{1}{4n}.$$

2. a. On considère une fontion réelle f définie et continue sur $[0,1]$ de $\mathbb{R}$ et n un entier ≥ 1. Pour tout $t \in [0,1]$, on pose :

$$B_n(f)(t) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(t).$$

Démontrer que, pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$|f(t) - B_n(f)(t)| \leq \sum_{k=0}^{n} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(t).$$

2. **b**. Démontrer que la fonction f est bornée sur $[0,1]$ et qu'elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0, \forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |x-y| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

2. **c**. **i**. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t \in [0,1]$, posons $K_\varepsilon(t) = \{k \in [\![0,n]\!] \,|\, |k - nt| \leq n\alpha\}$. Démontrer que :

$$\sum_{k \in K_\varepsilon(t)} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

2. **c**. **ii**. On pose : $M = \sup\limits_{t \in [0,1]} (\{|f(t)|\})$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t \in [0,1]$, posons $L_\varepsilon(t) = \{k \in [\![0,n]\!] \,|\, |k - nt| > n\alpha\}$. Démontrer que :

$$\sum_{k \in L_\varepsilon(t)} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(t) \leq \frac{2M}{\alpha^2} \sum_{k=0}^{n} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(t).$$

2. **c**. **iii**. En déduire que :

$$\sum_{k \in L_\varepsilon(t)} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(t) \leq \frac{M}{2n\alpha^2}.$$

2. **d**. **i**. En déduire qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\sup_{t \in [0,1]} |f(t) - B_n(f)(t)| \leq \varepsilon.$$

2. **d**. **ii**. Qu'est-ce que cela signifie pour la suite de fonctions polynomiales $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$?

[1] Y. Martinez-Maure

3. i. Supposons maintenant que f est une fonction définie et continue sur un segment $[a,b]$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $a < b$. Considérons la transformation affine $\psi : [0,1] \to [a,b]$ définie par $\psi(t) := a + (b-a)\,t$ pour tout $t \in [0,1]$ et notons g la fonction $f \circ \psi$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $P_n(t) = \left(B_n(g) \circ \psi^{-1}\right)(t)$. Démontrer que la suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur le segment $[a,b]$.

3. ii. Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b P_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

[1]Y. Martinez-Maure