C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 41–44, 2001
Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Contre-exemple à une caractérisation conjecturée de la sphère

Yves MARTINEZ-MAURE

1, rue Auguste-Perret, 92500 Rueil-Malmaison, France

(Reçu le 19 octobre 2000, accepté le 23 octobre 2000)

Résumé. Il est conjecturé depuis longtemps que si S est une surface convexe fermée de classe C^2_+ dont les courbures principales K_1, K_2 vérifient l'inégalité $(K_1 - c)(K_2 - c) \leqslant 0$ pour une constante c, alors S est une sphère. Des résultats partiels ont été obtenus par A.D. Aleksandrov, H.F. Münzner et D. Koutroufiotis.
Nous reformulons la conjecture en termes de hérissons et nous donnons un contre-exemple. En outre, nous prouvons la conjecture pour les surfaces de largeur constante et donnons une nouvelle preuve pour les surfaces analytiques. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

A counter-example to a conjectured characterization of the sphere

Abstract. *It has long been conjectured that a closed convex surface of class C^2_+ whose principal curvatures K_1, K_2 satisfy the inequality $(K_1 - c)(K_2 - c) \leqslant 0$ with some constant c, must be a sphere. Partial results have been obtained by A.D. Aleksandrov, H.F. Münzner and D. Koutroufiotis.*
We reformulate the conjecture in terms of hedgehogs and we give a counter-example. Besides, we prove the conjecture for surfaces of constant width and give a new proof for analytic surfaces. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Il est conjecturé depuis longtemps qu'une surface convexe fermée de classe C^2_+ (i.e. C^2 et à courbure de Gauss > 0) dont les courbures principales K_1, K_2 vérifient l'inégalité $(K_1 - c)(K_2 - c) \leqslant 0$ pour une constante c, est nécessairement une sphère. Pour les surfaces analytiques, cela fut établi par A.D. Aleksandrov [1,2] et H.F. Münzner [7]. La conjecture est aussi vérifiée pour les surfaces de révolution [6] et plus généralement pour celles qui admettent une projection orthogonale circulaire [3].

Cette Note reformule la conjecture en termes de hérissons et donne un contre-exemple. La notion de hérisson généralise celle de corps convexe de classe C^2_+. À tout corps convexe $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est associé une fonction support $h_K : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$, $p \mapsto h_K(p) = \max\{\langle m, p\rangle \mid m \in K\}$. Lorsque K est de classe C^2_+, h_K est C^2 et détermine le bord de K comme enveloppe de la famille d'hyperplans d'équation $\langle x, p\rangle = h_K(p)$. Une fonction $h \in \mathrm{C}^2(\mathbb{S}^n; \mathbb{R})$ n'est pas nécessairement la fonction support d'un corps convexe, mais on peut toujours lui associer l'enveloppe $\mathcal{H}_h$ de la famille d'hyperplans d'équation $\langle x, p\rangle = h(p)$. Cette

Note présentée par Marcel BERGER.

S0764-4442(00)01756-0/FLA
© 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

enveloppe est paramétrée par $x_h : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $p \mapsto (\mathrm{grad}h)(p) + h(p)p$. L'application x_h s'interprète comme l'inverse de l'application de Gauss de $\mathcal{H}_h$: toute partie régulière de $\mathcal{H}_h$ admet une orientation transverse pour laquelle p est le vecteur normal en $x_h(p)$. L'hypersurface $\mathcal{H}_h$ a été appelée le hérisson de fonction support h par R. Langevin, G. Levitt et H. Rosenberg [4].

Soit S une surface convexe fermée de classe C^2_+ dont les courbures principales K_1, K_2 vérifient l'inégalité $(K_1 - c)(K_2 - c) \leqslant 0$ pour une constante c. En posant $r = c^{-1}$, l'inégalité peut s'écrire $(R_1 - r)(R_2 - r) \leqslant 0$, où R_1, R_2 sont les rayons de courbure principaux de S. Notons f la fonction support de S. Comme $x_f : \mathbb{S}^2 \to S$ est l'inverse de l'application de Gauss de S, $R_1(p)$, $R_2(p)$ sont les valeurs propres de son application tangente en p. En posant $h = f - r$, on en déduit que $(R_1(p) - r)$, $(R_2(p) - r)$ sont les valeurs propres de l'application tangente à x_h en p, c'est-à-dire les rayons de courbure principaux de $\mathcal{H}_h$ en $x_h(p)$. La conjecture peut donc être reformulée comme suit :

« *Un hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$ dont la fonction de courbure $R_h(p) = \mathrm{dét}(\mathrm{T}_p x_h)$ est $\leqslant 0$ sur $\mathbb{S}^2$ est nécessairement réduit à un point.* »

L'étude des projections de $\mathcal{H}_h$ nous renseigne sur la représentation sphérique des singularités. Nous obtenons les résultats partiels connus et une preuve pour les surfaces de largeur constante. Dans le cas général, la méthode bute sur l'existence de singularités du type « bonnet croisé ». Nous exhibons un bonnet croisé hérisson à fonction de courbure $\leqslant 0$ (modelé sur $\mathbb{S}^2$ moins un demi-cercle). Enfin, nous formons un hérisson non trivial à fonction de courbure $\leqslant 0$ sur $\mathbb{S}^2$. Par dualité projective, cela entraîne l'existence d'une 2-sphère C^2-plongée dans $\mathbb{S}^3$ avec une courbure extrinsèque $\leqslant 0$ mais non totalement géodésique.

2. Étude des cas particuliers

Étant donné un hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^{n+1}$, l'indice $\mathrm{i}_h(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \mathcal{H}_h$ comme le nombre algébrique d'intersection d'une demi-droite orientée d'origine x avec le hérisson muni de son orientation transverse (nombre indépendant de la demi-droite pour un ouvert dense de directions). La fonction de courbure d'un hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$ peut être reliée à l'indice des hérissons plans déduits de $\mathcal{H}_h$ par projection orthogonale. Pour tout $n \in \mathbb{S}^2$, la restriction de h au cercle $\mathbb{S}^1_n = \mathbb{S}^2 \cap n^\perp$ est la fonction support h_n du « projeté » de $\mathcal{H}_h$ sur $n^\perp$: $\mathcal{H}_{h_n} = (\pi_n \circ x_h)(\mathbb{S}^1_n)$, où π_n est la projection orthogonale sur $n^\perp$. L'indice de ce projeté vérifie :

Théorème 1 ([5]). – *Toute valeur régulière x de la restriction de $\pi_n \circ x_h$ à l'hémisphère $\mathbb{S}^2_n = \{p \in \mathbb{S}^2 \mid \langle p, n\rangle \geqslant 0\}$ vérifie $\mathrm{i}_{h_n}(x) = \nu^n_h(x)^+ - \nu^n_h(x)^-$, où $\nu^n_h(x)^+$ (resp. $\nu^n_h(x)^-$) est le nombre de $p \in \mathbb{S}^2_n$ tels que $x_h(p)$ est un point elliptique (resp. hyperbolique) de $\mathcal{H}_h$ situé sur la droite $\{x\} + \mathbb{R}n$.*

Par conséquent, si $\mathcal{H}_h$ est à fonction de courbure $\leqslant 0$ sans être réduit à un point, i_{h_n} est $\leqslant 0$ et non identiquement nul. Comme i_{h_n} est $\geqslant 0$ si $\mathcal{H}_{h_n}$ est un cercle ou un point, cela établit la conjecture pour les surfaces admettant une projection orthogonale circulaire. Le corollaire suivant utilise la notion de point d'un hérisson. À tout hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^{n+1}$ correspond une pseudo-métrique définie sur $\mathbb{S}^n$ par $\rho_h(p, q) = \inf\big(\{L(x_h \circ \gamma) \mid \gamma \in C_{pq}\}\big)$, où C_{pq} est l'ensemble des arcs C^1 par morceaux d'extrémités p, q et $L(x_h \circ \gamma)$ la longueur de $x_h \circ \gamma$. Un point de $\mathcal{H}_h$ est par définition un point de $(\mathbb{S}^n/\sim) = \{[p] \mid p \in \mathbb{S}^n\}$, où $p \sim q$ si et seulement si $\rho_h(p, q) = 0$, muni de la métrique $\mathrm{d}_h([p], [q]) = \rho_h(p, q)$. Mais par souci de simplicité, on ne distinguera pas toujours $[p]$ et sa réalisation géométrique $x_h(p)$.

Corollaire 1. – *Si $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$ est à fonction de courbure $\leqslant 0$, alors* : (i) *pour tout $x \in n^\perp - \mathcal{H}_{h_n}$, il existe exactement $-2\mathrm{i}_{h_n}(x)$ points de $\mathcal{H}_h$ dont la réalisation géométrique se trouve sur la droite $\{x\} + \mathbb{R}n$* ; (ii) *pour tout $x \in \mathcal{H}_{h_n}$, tout point de $\mathcal{H}_h$ dont la réalisation géométrique est sur la droite $\{x\} + \mathbb{R}n$ est la classe d'un point du cercle $\mathbb{S}^1_n = \mathbb{S}^2 \cap n^\perp$.*

Soit $\mathcal{H}_h$ un hérisson de $\mathbb{R}^{n+1}$. On dira que $s \in x_h(\mathbb{S}^n)$ est un point extrémal de $\mathcal{H}_h$ dans la direction $u \in \mathbb{S}^n$ si $\langle x_h(p), u\rangle \leqslant \langle s, u\rangle$ pour tout $p \in \mathbb{S}^n$.

LEMME 1. – *Soit s un point extrémal de $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$ dans la direction $n \in \mathbb{S}^1$. Sur $\mathbb{S}^1$, les composantes connexes de $x_h^{-1}(s)$ sont séparées entre elles par $\{-n, n\}$.*

Démonstration. – On peut supposer $s = (0,0)$ et $n = (0,1)$. La droite support de vecteur normal $u_\theta = (\cos\theta, \sin\theta) \notin \{-n, n\}$ coupe alors $n^\perp$ au point $(x(\theta), 0)$, où $x(\theta) = h(u_\theta)/\cos\theta$. Si l'intérieur d'un arc $\Gamma \subset \mathbb{S}^1$ d'extrémités α, $\beta \in x_h^{-1}(s)$ ne rencontre pas $\{-n, n\}$, alors $\Gamma \subset x_h^{-1}(s)$. En effet, on a alors $x(\theta) \to 0$ si $u_\theta \to \alpha$ ou β, $x'(\theta) = \langle x_h(u_\theta), n\rangle/\cos^2\theta \leqslant 0$ si $u_\theta \in \Gamma - \{\alpha, \beta\}$, et donc $h = 0$ sur Γ. $\square$

THÉORÈME 2. – *Soit $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$ un hérisson à fonction de courbure $\leqslant 0$. Si $\mathcal{H}_h$ n'est pas un point, alors $\mathcal{H}_h$ admet dans une direction $n \in \mathbb{S}^2$, un point extrémal s dont la représentation sphérique $x_h^{-1}(s)$ ne rencontre pas l'un des demi-cercles reliant $-n$ à n sur $\mathbb{S}^2$.*

Démonstration. – Si $\mathcal{H}_h$ n'est pas un point, il existe une direction $n \in \mathbb{S}^2$ dans laquelle $\mathcal{H}_h$ a deux points extrémaux distincts s_1 et s_2. Posons $p = (s_2 - s_1)/\|s_2 - s_1\|$ et considérons le projeté de $\mathcal{H}_h$ sur $p^\perp$. La projection commune s de s_1 et s_2 est un point extrémal de $\mathcal{H}_{h_p}$ dans la direction n. Une composante connexe de $x_{h_p}^{-1}(s)$ ne peut rencontrer à la fois $x_h^{-1}(s_1)$ et $x_h^{-1}(s_2)$ car $\mathcal{H}_h$ ne peut contenir le segment $[s_1, s_2]$. Or, $x_h^{-1}(s_1)$ et $x_h^{-1}(s_2)$ rencontrent $x_{h_p}^{-1}(s)$ (corollaire 1) et les composantes sont séparées entre elles par $\{-n, n\}$ sur $\mathbb{S}_p^1$ (lemme 1), donc $x_h^{-1}(s_1)$ (resp. $x_h^{-1}(s_2)$) ne rencontre pas l'un des demi-cercles reliant $-n$ à n sur $\mathbb{S}_p^1$. $\square$

Un hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est dit analytique (resp. projectif) si sa fonction support h est analytique (resp. antisymétrique : pour tout $p \in \mathbb{S}^n$, $h(-p) = -h(p)$).

THÉORÈME 3. – *Si $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$ est un hérisson analytique* (*resp. projectif*) *à fonction de courbure $\leqslant 0$, alors $\mathcal{H}_h$ est un point.*

Démonstration. – Soit s un point extrémal de $\mathcal{H}_h$ dans une direction $n \in \mathbb{S}^2$ et $[m]$ un point de $\mathcal{H}_h$ dont s est la réalisation géométrique. D'après le théorème 2, il suffit de vérifier que $x_h^{-1}(s)$ rencontre chaque demi-cercle reliant $-n$ à n sur $\mathbb{S}^2$. D'après le corollaire 1, $[m]$ rencontre chaque grand-cercle passant par n. Si $\mathcal{H}_h$ est projectif, $x_h^{-1}(s)$ est invariant par antipodie et le résultat s'ensuit. Supposons $\mathcal{H}_h$ analytique et non réduit à un point. Comme $\phi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \langle x_h(u), n\rangle$ est analytique, les composantes connexes de $\phi(u) = \langle s, n\rangle$ sont constituées d'un point ou d'un arc fermé simple ou du plongement d'un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair [8]. Notons C celle qui contient $[m]$. Comme $[m]$ rencontre tout grand-cercle passant par n et rencontre au plus une fois tout demi-grand-cercle joignant $-n$ à n (lemme 1), C rencontre $\{-n, n\}$ ou C est un arc fermé simple séparant $-n$ et n sur $\mathbb{S}^2$. Or, $C \subset x_h^{-1}(s)$ (sinon un projeté de $\mathcal{H}_h$ contient un segment non trivial), donc $x_h^{-1}(s)$ rencontre chaque demi-cercle reliant $-n$ à n sur $\mathbb{S}^2$, en contradiction avec le théorème 2. $\square$

COROLLAIRE 2. – *La conjecture est vérifiée pour les surfaces analytiques* (*resp. de largeur constante*).

Démonstration. – Le cas analytique est immédiat. Lorsque S est de largeur constante, $h = f - r$ est de la forme $g + k$, où g est antisymétrique et k constante. On a alors $R_h = R_g + 2kR_{(1,g)} + k^2$, où $R_{(1,g)}$ est la moyenne des rayons de courbure principaux de $\mathcal{H}_g$. On en déduit que $\mathcal{H}_h$ est projectif en observant que l'inégalité $R_h \leqslant 0$ prise en deux points singuliers antipodaux de x_g donne $k^2 \leqslant 0$. $\square$

3. Un contre-exemple

Ni la méthode du paragraphe 2, ni les travaux antérieurs ne peuvent prendre en compte l'existence de singularités du type bonnet croisé. L'application $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto (x, y, z) = r^4(u, 1, uv)$, où $r = \sqrt{u^2 + v^2}$, définit un bonnet croisé pouvant être vu comme un hérisson $\mathcal{H}_h$ (modelé sur la sphère $\mathbb{S}^2$ privée du demi-cercle $z = 0$, $x \leqslant 0$) à fonction de courbure $\leqslant 0$. Sur $\mathbb{S}^2$, le lieu singulier de $\mathcal{H}_h$ est le demi-cercle $y = 0$, $x \geqslant 0$. Représentation sphérique du point extrémal dans la direction $n = (0, -1, 0)$, ce demi-cercle ne rencontre pas les géodésiques de $\mathbb{S}^2$ qui relient $-n$ à n par l'hémisphère $x < 0$. La méthode du paragraphe 2 ne peut donc pas prendre en compte de telles singularités. La partie régulière de $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$ est la portion $y > 0$ de la surface algébrique d'équation $x^4y^5 - (x^4 + y^2z^2)^2 = 0$. Elle peut donc être obtenue en recollant le graphe de $f(x, y) = (x/y)\sqrt{y^{5/2} - x^2}$ à son symétrique par rapport au plan $z = 0$. Les vérifications ne présentent aucune difficulté particulière. Cet exemple prouve au passage qu'un hérisson non analytique peut admettre une paramétrisation analytique.

Cet exemple suggère d'assembler 4 bonnets croisés pour former un hérisson à fonction de courbure $\leqslant 0$ sur $\mathbb{S}^2$. Commençons par recoller le graphe de

$$f(x, y) = \frac{xy}{1 - x^4 - y^4}\sqrt{\left(1 - x^4 - y^4\right)^{5/2} - 25x^2y^2\left(x^8 + y^8 + 3\left(x^4 + y^4 - x^4y^4\right) + 1\right)^{1/2}},$$

où $(x, y) \in D = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid |u|^{4/5} + |v|^{4/5} \leqslant 1\right\}$, à son symétrique par rapport au plan $z = 0$ (noter que le radical s'annule précisément sur le bord de D). La surface obtenue est formée de quatre bonnets croisés, mais présente de la courbure $\geqslant 0$. Afin d'éliminer cette courbure $\geqslant 0$, ajoutons à f une fonction de la forme $g(x, y) = a(x^2 - y^2) + b(x^4 - y^4)$, avec $a \neq 0$ et $a + 6b = 0$ pour que le graphe de $g : D \to \mathbb{R}$ ait une courbure < 0 hormis aux singularités de son bord. Autrement dit, considérons la famille à un paramètre de surfaces $(\mathcal{S}_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$ définie par : $X_t : D \times \{-1, 1\} \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, \varepsilon) \mapsto \left(x, y, (x^2 - y^2) - \frac{1}{6}(x^4 - y^4) + t\varepsilon f(x, y)\right)$.

Les calculs sur ordinateur montrent l'existence d'un intervalle de valeurs de t pour lesquelles $\mathcal{S}_t$ est une surface à courbure de Gauss < 0. Parmi ces valeurs, nous prenons $t = 1/12$. La surface $\mathcal{S}_{1/12}$ est une portion de surface algébrique. Elle est symétrique par rapport aux plans $x = 0$ et $y = 0$ et par rapport aux droites $x = y = 0$ et $z = 0$, $x = y$ (resp. $x = -y$). Comme elle est le recollement de deux graphes au-dessus de D (dont le bord est le hérisson de fonction support $(u, v) \mapsto uv(u^4 + v^4)^{-1/4}$, $(u, v) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$), la stricte négativité de sa courbure de Gauss (et donc l'injectivité locale de son application normale) implique qu'elle peut être vue comme un hérisson $\mathcal{H}_h$. Étudions sa classe de différentiabilité. Les calculs sur ordinateur montrent que le lieu singulier de $\mathcal{H}_h$ est formé sur $\mathbb{S}^2$ des 4 demi-cercles : (i) $3x + 4z = 0$, $y \geqslant 0$; (ii) $3y - 4z = 0$, $x \geqslant 0$; (iii) $3x - 4z = 0$, $y \leqslant 0$; (iv) $3y + 4z = 0$, $x \leqslant 0$. On vérifie d'emblée que h est C^∞ hors ce lieu singulier et C^1 sur $\mathbb{S}^2$ (noter que x_h est la restriction à $\mathbb{S}^2$ du gradient de $\varphi(u) = \|u\| h(u/\|u\|)$, $u \in \mathbb{R}^3 - \{0_{\mathbb{R}^3}\}$). On prouve alors que h est C^2 sur $\mathbb{S}^2$ en notant que sur $\mathbb{S}^2$, les valeurs propres de $(\operatorname{hess}\varphi)(p)$ (0 et les rayons de courbure principaux de $\mathcal{H}_h$ en $x_h(p)$) tendent vers 0 au lieu singulier (les calculs montrent que R_h et $R_{(1,h)}$ tendent vers 0 au lieu singulier).

Références bibliographiques

[1] Aleksandrov A.D., On uniqueness theorem for closed surfaces (Russe), Doklady Akad. Nauk SSSR 22 (1939) 99–102.

[2] Aleksandrov A.D., On the curvature of surfaces (Russe), Vestnik Leningrad. Univ. 21 (19) (1966) 5–11.

[3] Koutroufiotis D., On a conjectured characterization of the sphere, Math. Ann. 205 (1973) 211–217.

[4] Langevin R., Levitt G., Rosenberg H., Hérissons et multihérissons (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss), in: Singularities, Warsaw, 1985, pp. 245–253; Banach Center Publ. 20, PWN Warsaw, 1988.

[5] Martinez-Maure Y., Indice d'un hérisson : étude et applications, Publ. Math. 44 (2000) 237–255.

[6] Münzner H.F., Über eine spezielle Klasse von Nabelpunkten und analoge Singularitäten in der zentroaffinen Flächentheorie, Comment. Math. Helv. 41 (1966-67) 88–104.

[7] Münzner H.F., Über Flächen mit einer Weingartenschen Ungleichung, Math. Z. 97 (1967) 123–139.

[8] Sullivan D., Combinatorial invariants of analytic spaces, in: Proc. Liverpool Singularities I, Lect. Notes in Math. 192, Springer-Verlag, 1971, pp. 165–168.