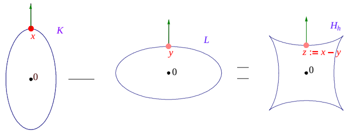
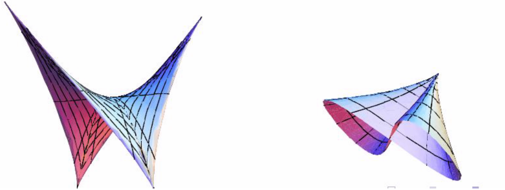
Une vieille caractérisation conjecturée de la sphère

Conjecture (`A.D. Aleksandrov`, 1930'). *Si une surface convexe fermée* S *de classe* C_+^2 dans $\mathbb{R}^3$ *vérifie* $(k_1 - c)(k_2 - c) \leq 0$, *où* $c = cste$, *alors* S *est une sphère de rayon* $r = 1/c$.

Idées. 1. On peut soustraire des convexes : cela donne des 'hérissons'.
2. Décomposer S en $S(0;r) + (S - S(0;r))$ et étudier le terme hérisson avec des techniques ad-hoc. **Résultat**. Un contre-exemple ($Y.M^2$, 2001).



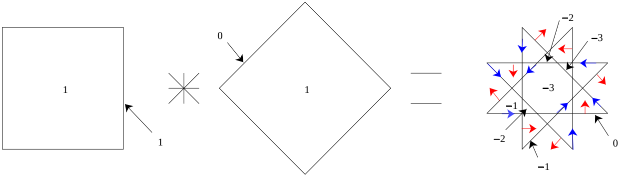


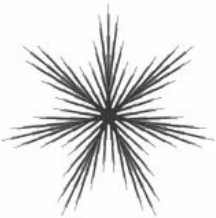
$$\left(\left(x^2+y^2\right)^2 + 8y\left(y^2-3x^2\right)\right)^2 + 432y\left(y^2-3x^2\right)\left(351-10\left(x^2+y^2\right)\right)$$
$$= 567^3 + 28\left(x^2+y^2\right)^3 + 486\left(x^2+y^2\right)\left(67\left(x^2+y^2\right) - 567\times 18\right)$$

est l'équation d'une courbe convexe de largeur constante ($Y.M^2$, 2021)

La théorie des hérissons

Définition des différences de corps convexes arbitraires. **1.** Par récurrence sur la dim. (en remplaçant ‘ensembles de support’ par ‘hérissons de support"). **2.** Ou par l’intégration d’Euler. Rappel : $\mathbf{1}_{K+L} = \mathbf{1}_K * \mathbf{1}_L$ (Groemer 1977)





$$\mathbf{1}_{K-L}(x) = (-1)^{n+1}\left(\mathbf{1}_K * \mathbf{1}_L^{\circ}\right)(x) \quad \text{(YM}^2\text{ 2015)}$$

Beaucoup de notions classiques pour les convexes s’étendent aux hérissons. Nombre de résultats/problèmes ont leurs homologues hérissons. Quelques adaptations sont évidemment nécessaires.

De nombreuses variantes ou extensions : multihérissons, hérissons de $\mathbb{S}^{n+1}$ et $\mathbb{H}^{n+1}$, hérissons minimaux, hérissons marginalement piégés dans le symplectisé, hérissons complexes de $\mathbb{C}^{n+1}$, etc.